Rozšíření MA1 pro biochemiky.
Nevlastní integrál Riemannův, resp. Newtonův .

1. Dané integrály buď vypočítejte nebo aspoň rozhodněte, zda dané integrály konvergují nebo divergují :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \ ; \ \int_0^1 x^\alpha\,dx \ ; \ \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx \ \ (a<b),\ a,b\in R; \ \int_0^\infty e^{-x}\,dx \ ; \ \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \ ; \ \int_0^\infty \cos x\,dx \ ;$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \ ; \ \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \ ; \ \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx \ ; \ \int_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \ ,(a>0) \ ; \ \int_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}\,dx \ ,(a>0) \ ;$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \ ; \ \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \ ; \ \int_0^1 \ln x\,dx \ ; \ \int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx \ ; \ \int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx \ ; \ \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx \ ; \ \int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx \ ;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\,dx \ ; \ \int_1^\infty \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}\,dx \ .$$

2. Ukažte, že platí:

(i) Je-li $f \in R(a,b)$, $0<a<b$ pro každé b, $a<b$, $f(x)>0$ v intervalu $[a,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $L>0$, pak $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje.

(ii) Jsou-li $f,g \in R(a,b)$, $0<a<b$ pro každé b, $a<b$, $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0$ pro $x\in[a,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A>0$, pak $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje právě když konverguje i integrál $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

3. Aplikace nevlastního integrálu:

a) Spočítejte objem „nekonečného“ trychtýře, vzniklého rotací grafu funkce

$$f(x)=\frac{1}{x}\ ,\quad x\in[1,\infty)$$

kolem osy x .

b) Vyšetřete užitím integrálního kriteria konvergenci řad :

a) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$; b) $\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln n}$; c) $\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln^2 n}$; $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cdot\exp(\frac{1}{n})$.